

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЯЗКИХ ПУЛЬСАЦИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. Б. Заметаев, А. Р. Горбушин

Московский Физико-Технический Институт

(Государственный Университет)

E-mail: zametaev.vb@mipt.ru, gorbushin.ar@mipt.ru

Поступила в редакцию

Исследован двумерный пограничный слой несжимаемой вязкой жидкости при наличии пульсаций скоростей и давления. Характерное число Рейнольдса велико, и как следствие, нестационарный (турбулентный) пограничный слой тонок. Для анализа полных нестационарных уравнений Навье-Стокса используется асимптотический подход, что позволяет выделить характерные вязкие и невязкие зоны течения в пограничном слое, а сращивание решений дает самосогласованную теорию. Найдены аналитические выражения для вязких пульсаций, которые описываются уравнением Гамеля при большом значении параметра.

Ключевые слова: пограничный слой, вязкость, нестационарность, турбулентность, асимптотический анализ, пульсации

Попытки создать теорию турбулентных течений продолжают уже более 120 лет, с момента открытия этого явления и введения понятия турбулентных напряжений Рейнольдсом [1,2]. Основной подход теоретиков - это осреднение пульсаций скорости и давления по некоторому большому периоду в турбулентном пограничном слое, введение турбулентных напряжений и выражение их некоторыми полуэмпирическими формулами через неизвестный заранее осредненный профиль продольной скорости. Затем для осредненной скорости можно решить задачу в турбулентном пограничном слое (ПС) и найти характеристики его. Одними из первых на этом пути были Прандтль [3], предложивший гипотезу пути перемешивания турбулентных струек и Карман [4]. Позднее было выпущено множество работ, уточняющих схему Прандтля. Одновременно проводилось множество экспериментов, описывающих свойства турбулентного пограничного слоя и особенности перехода потока из ламинарной формы в турбулентную. В частности, было найдено, что турбулентный пограничный слой в несколько раз толще ламинарного, Бюргерс и ван дер Хегге-Цейнен [5,6], а турбулентное напряжение трения

заметно больше ламинарного. То есть осредненный профиль скорости заметно более наполненный, чем в ламинарном случае. В частности, коэффициент силы трения, измеренный для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине, в 5-7 раз выше, чем при ламинарном обтекании, Ханзен [7].

Существенным этапом в развитии теории турбулентности оказались результаты применения теории устойчивости к анализу различных течений в каналах, трубах и пограничных слоях, т.к. было установлено, что малые возмущения нарастают в потоке и при числах Re больше критического приводят к турбулизации течения. К пионерским работам можно отнести исследования Рэля [8], изучавшего устойчивость вязкого потока в каналах к малым возмущениям. Позже Orr и Зоммерфельд [9,10] обобщили эти результаты на вязкие течения, а Толлмин и Шлихтинг [11,12] ввели понятие нарастающей волны возмущений, приводящей в итоге к турбулентности.

В 30-50е годы двадцатого столетия было выполнено множество качественных исследований однородной турбулентности, основанных на физических законах сохранения, Колмогоров [13], Обухов [14], Ландау-Лифшиц [15], а также заложены основы теории турбулентных слоев. В частности введено понятие основной части пограничного слоя Карман [4] – слой дефекта скорости, и понятие ламинарного вязкого подслоя вблизи обтекаемой поверхности Прандтль [16], Изаксон [17], Милликен [18]. Был установлен логарифмический закон поведения осредненной скорости вблизи стенки и сформулировано предельное состояние течения при больших числах Re в турбулентных пограничных слоях Яник [19]. В 70-80е годы получила развитие асимптотическая теория, примененная к анализу осредненных уравнений Рейнольдса, Меллор [20], Фендел [21], Афзал [22], Пономарев [23], Сычев В.В. и Сычев Вик.В. [24]. Активное внимание исследователей привлекла асимптотическая теория отрыва турбулентного пограничного слоя, Сычев В.В. и Сычев Вик.В. [25], Шейшль и Клювик [26], Смит, Шейшль и Клювик [27].

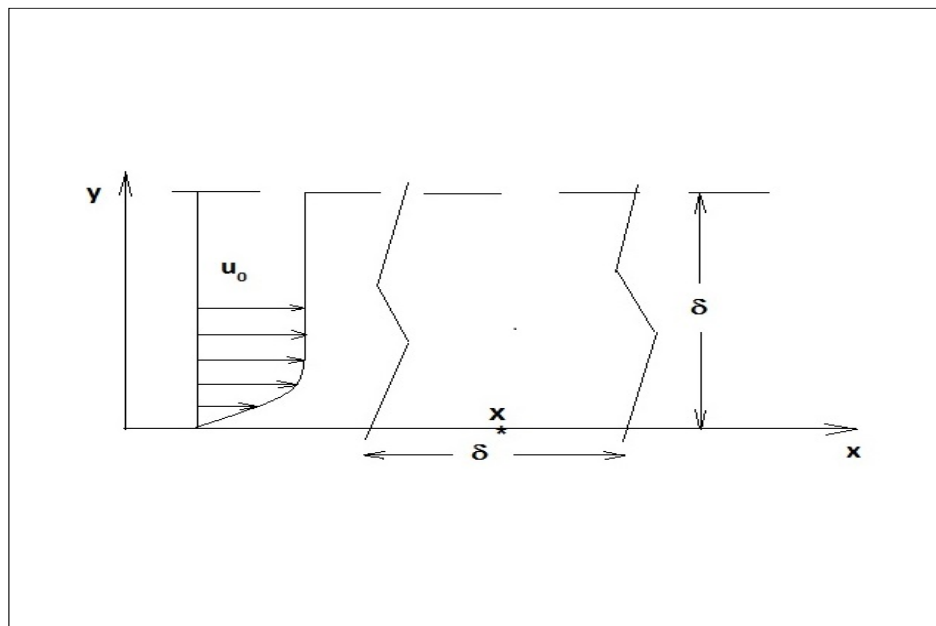
В 90е годы и по настоящее время к исследованиям турбулентных пограничных слоев добавились мощные численные методы. И по мере создания все более мощных компьютеров усложнялись полуэмпирические формулы и модели турбулентности, позволяющие просчитывать основные инженерные задачи, поставленные промышленностью. Авторы не являются специалистами в компьютерных методах и не могут дать квалифицированную оценку таким подходам, однако надо отметить работы по прямому численному моделированию турбулентных течений DNS, например Егоров, Судаков, Федоров [28].

В предлагаемой работе выполнено асимптотическое исследование вязких пульсаций в двухмерном несжимаемом турбулентном пограничном слое, развивающемся вдоль плоской пластины. Для анализа полных нестационарных уравнений Навье-Стокса используется метод многих масштабов при стремлении числа Рейнольдса к бесконечности, а неизвестной заранее толщины пограничного слоя к нулю. В качестве основы для рассмотрения используются результаты работы Заметаева и Горбушина [29], посвященной развитию крупномасштабных пульсаций (вихрей) в ламинарных или турбулентных пограничных слоях в рамках невязкой постановки. В частности, используется найденный факт, что малые возмущения относительно осредненного профиля продольной скорости состоят из суммы сносимых потоком (традиционных Рэлеевских) возмущений и так называемого сингулярного возмущения, которое отвечает за взаимодействие вихрей со стенкой. Показано, что найденные сингулярные аналитические пульсации качественно соответствуют поведению пульсаций в турбулентных пограничных слоях Райхардт [30], Шлихтинг [31], а вычисленный теоретический коэффициент корреляции пульсаций близок по величине к экспериментальному значению. Вблизи обтекаемой поверхности описана вязкая малая ламинарная область, решение в которой удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса, но эта область не является тонким слоем, как принято считать, а имеет квадратную форму. А тонкий ламинарный подслой в турбулентном ПС состоит по сути из непрерывного набора малых квадратных областей. Таким образом, в каждой точке по медленной переменной вдоль пластины, происходит быстрое взаимодействие крупномасштабных пульсаций в пограничном слое со своей малой вязкой ламинарной областью на дне пограничного слоя. Найдено, что это быстрое решение имеет сложную форму по времени и пространству, но в результате дает свой вклад в эволюцию осредненного профиля скорости в турбулентном пограничном слое.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ.

Рассматривается стационарное двухмерное течение вязкой несжимаемой жидкости около плоской пластины длины L , Фиг.1. Характерные время, размер, скорость набегающего потока равны соответственно L/V_∞ , L , V_∞ , а давление вводится по формуле $p' = p_\infty + \rho V_\infty^2 p$, где ρ плотность жидкости и μ коэффициент динамической вязкости. Число Рейнольдса вводится как обычно $Re = \rho V_\infty L / \mu$ и полагается большой величиной в дальнейшем асимптотическом исследовании. В отличие от внешнего потока,

пограничный слой, развивающийся вдоль пластины, предполагается нестационарным (турбулентным), имея ввиду наличие пульсаций давления и скоростей относительно некоторого базового (осредненного) профиля продольной скорости течения. Предполагается, что пульсации малы по амплитуде, но с другой стороны достаточно велики, чтобы их квадраты влияли на формирование базового (осредненного) течения $u_0(x, y_1)$, смотрите например Шлихтинг [31]. Помимо числа Рейнольдса введем в рассмотрение в качестве малого параметра неизвестную заранее толщину пограничного слоя $\delta \rightarrow 0$. В ламинарном пограничном слое $\delta \sim \text{Re}^{-1/2}$, но данное исследование охватывает турбулентный пограничный слой и поэтому пока порядок величины δ не известен. Напомним, что в соответствии с экспериментальными данными, например Шубауэр и Клебанов [32], турбулентный пограничный слой значительно толще ламинарного, и поэтому будем полагать $\delta \gg \text{Re}^{-1/2}$.



Фиг. 1. Схема течения в пограничном слое вблизи некоторой выбранной точки

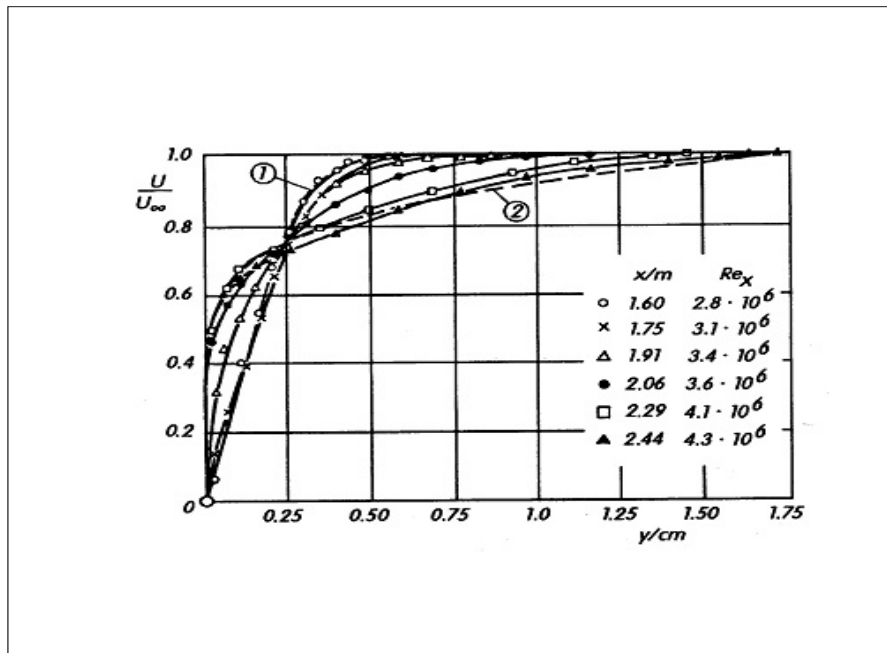
Для анализа, полные нестационарные уравнения Навье-Стокса удобно преобразовать. Для этого, продольное уравнение импульса продифференцируем по x , а вертикальное по y , сложим их и получим систему уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь u, v, p - это безразмерные продольная и вертикальная компоненты скорости и приращение давления. В пограничном слое, будь он ламинарный или турбулентный, существуют характерные масштабы, а именно: продольный масштаб развития пограничного слоя $x \sim 1$, размеры области порядка толщины пограничного слоя $x \sim \delta, y \sim \delta$, длины определяемые свободным взаимодействием Сычев [33,34], Нейланд [35], Стюартсон [36], Меситер [37], Рубан [38], толщина вязкого ламинарного подслоя, характерный размер вязкой диссипации Колмогорова [13]. На основе этих известных результатов, естественно воспользоваться методом многих масштабов, Найфэ [39], для поиска асимптотического разложения решения уравнений (1.1)-(1.3) внутри пограничного слоя, в предположении $\text{Re} \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$. Причем на первом этапе, ограничимся масштабами естественной длины эволюции пограничного слоя $x \sim 1$ и короткими размерами и коротким временем пульсаций $x \sim \delta, y \sim \delta, t \sim \delta$. Данные короткие (быстрые) переменные характерны для так называемых крупномасштабных пульсаций в турбулентном пограничном слое, когда размер вихрей сопоставим с толщиной пограничного слоя, а временной масштаб сопоставим со временем пролета жидкой частицы на длину толщины пограничного слоя. В дальнейшем будем полагать, в соответствие с известными экспериментальными данными Фиг.2, Шубауэр и Клебаноф [32], что в пограничном слое в процессе перехода формируется некий продольный основной (осредненный) профиль скорости $u_0(x, y_1)$, по отношению к которому пульсации малы.



Фиг.2. Осредненный профиль скорости на пластине в области перехода от ламинарного режима (кривая 1) до турбулентного (кривая 2).

В исследовании не предполагается заранее логарифмическое поведение основного профиля скорости вблизи стенки, функция $u_0(x, y_1)$ подлежит, вообще говоря определению. Более того, многочисленные измерения, например Клебаноф [40], профиля скорости в турбулентном пограничном слое вблизи стенки показывают вполне конечную величину напряжения трения, которая в 6-7 раз превышает ламинарное напряжение трения, но не более того. Опираясь на эти данные будем полагать разложение основной скорости вблизи стенки в виде $u_0 = \lambda(x)y_1 + \dots$. Функция $\lambda(x)$ пропорциональна напряжению трения на дне турбулентного пограничного слоя и зависит от медленной эволюционной переменной $x \sim 1$. Отталкиваясь от вышеприведенных предположений и оценок, разложение решения ищем в виде

$$u = u_0(x, y_1) + \delta^{1/2}u_1(x_1, y_1, t_1) + \delta u_2 + \dots, \quad v = \delta^{1/2}v_1(x_1, y_1, t_1) + \delta v_2 + \dots, \quad (1.4)$$

$$p = \delta^{1/2}p_1(x_1, y_1, t_1) + \delta p_2 + \dots, \quad \omega = -\delta^{-1} \frac{\partial u_0}{\partial y_1} + \delta^{-1/2}\omega_1(x_1, y_1, t_1) + \delta\omega_2 + \dots \quad (1.5)$$

$$y_1 = y/\delta, \quad x_1 = x/\delta, \quad t_1 = t/\delta \quad (1.6)$$

В формуле (1.5) для наглядности приведено разложение завихренности по малому параметру δ . Важно отметить, что возмущения первого и второго порядка малости зависят не только от быстрых переменных с индексом 1, но и от медленной переменной $x \sim 1$, что формально будет учитываться в будущем анализе. Подставляя (1.4)-(1.6) в

уравнения Навье-Стокса (1.1)-(1.3) и совершая предельный переход $Re \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, можно выделить систему уравнений для членов первого порядка.

Первое приближение в основной части ПС

$$\nabla^2 p_1 = -2 \frac{du_0}{dy_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0 \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -\frac{\partial p_1}{\partial y_1} \quad (1.8)$$

$$y_1 = 0: \quad v_1 = 0, \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \quad y_1^2 + x_1^2 \rightarrow \infty: \quad p_1 \rightarrow 0, \quad v_1 \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

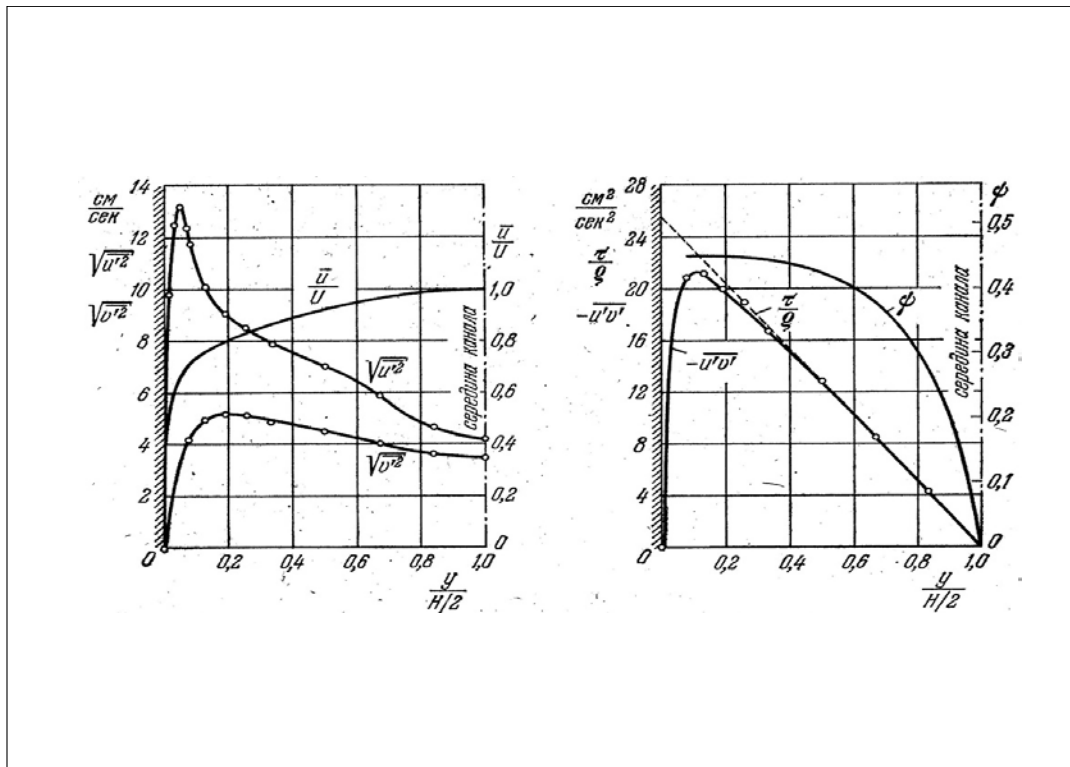
Данная система уравнений хорошо известна и есть не что иное как невязкие уравнения Рэлея для малых возмущений в каналах либо в пограничных слоях. Интересно отметить, что в системе (1.7)-(1.9) уравнения для v_1, p_1 отделяются и являются основными, а возмущение продольной скорости носит вторичный характер и может быть найдено через уравнение неразрывности. Традиционно решение системы (1.7)-(1.9) представляется в виде бегущей волны, в результате чего легко установить устойчивость либо неустойчивость базового течения по отношению к малым возмущениям. Другой подход - это решить задачу с начальными данными и тогда можно найти возмущенное течение в любой момент времени. Важно отметить, что такие “регулярные” возмущения сносятся вниз по потоку, растут либо затухают, но вблизи твердых границ не нарастают, как это имеет место например для пульсаций в турбулентных пограничных слоях, Фиг. 3 (левый рисунок). В работе Заметаева и Горбушина [29] было найдено еще одно собственное решение системы (1.7)-(1.9), “сингулярное” вблизи обтекаемой поверхности, удовлетворяющее условию непротекания всюду за исключением единственной точки на поверхности в быстрых переменных. Если в некоторой точке x по медленной переменной ввести на стенке полярную систему координат по формулам $x_1 = r \cos \varphi, y_1 = r \sin \varphi$ и представить решение линейной системы уравнений (1.7)-(1.9) в виде суммы регулярного решения Рэлея и сингулярного найденного, то получим

$$v_1 = v_R + v_{1S} \quad (1.10)$$

$$v_{1S} = \frac{\sin \varphi}{r} f\left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1\right) + \dots, \quad u_{1S} = \frac{\cos \varphi}{r} f\left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1\right) + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.11)$$

$$p_{1s} = 2\lambda \int_0^\varphi \sin^2 \theta \cdot f\left(\frac{\text{ctg} \theta}{\lambda} - t_1\right) d\theta + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.12)$$

Функция f в формулах (1.11)-(1.12) остается произвольной в рамках рассмотрения невязкой задачи, однако она зависит только от переменной оператора переноса в уравнении (1.8). Можно в некоторый начальный момент времени задать возмущение вблизи стенки в виде функции $f = f_0(\varphi)$, тогда по формулам (1.11)-(1.12) можно немедленно найти возмущения скоростей и давления в любой момент времени. Эти возмущения будут сноситься по углу вокруг сингулярной точки, оставляя функцию f неизменной по амплитуде. То есть это сингулярное решение в каком-то смысле закреплено на стенке в выбранной точке. Важно отметить, что если функция f ограничена при $\varphi = 0, \varphi = \pi$, то на обтекаемой поверхности скорость u_{1s} конечна, если же $f = 0$ при $\varphi = 0, \varphi = \pi$, то на обтекаемой поверхности скорость u_{1s} принимает значение ноль, т.е. выполняется условие прилипания. Если зафиксировать угол φ в формулах (1.11) и устремить $r \rightarrow 0$, то легко увидеть, что пульсации скоростей v_1, u_1 нарастают, в качественном соответствии с опытными данными при подходе к обтекаемой поверхности, Фиг.3.



Фиг. 3. Поведение среднеквадратичных величин пульсаций (слева) и коэффициента корреляции вблизи стенки (справа) по Райхарту [30] в канале.

Если же угол $\varphi \rightarrow 0, \pi$, то из (1.11) также легко увидеть, что u_1 растет быстрее чем v_1 при приближении к стенке. Таким образом, поведение сингулярного нестационарного собственного решения (1.11), при приближении к обтекаемой поверхности, качественно напоминает поведение турбулентных пульсаций в пограничных слоях. Отметим, что пульсация (1.12) давления p_1 вблизи стенки не растет.

Представляет интерес сравнить полученные аналитические формулы для пульсаций с экспериментом не только качественно, но и количественно. С этой целью можно вычислить коэффициент корреляции ψ_k между продольной и поперечной пульсациями вблизи стенки. В эксперименте, см. Фиг.3, он равен $\psi_k \approx 0.45$, а вводится формулой

$$\psi_k = \frac{\overline{u_1 v_1}}{\sqrt{\overline{u_1^2}} \cdot \sqrt{\overline{v_1^2}}} \quad (1.13)$$

Квадраты пульсаций можно вычислить, формально интегрируя их по некоторому большому периоду времени, как это делают в эксперименте. Поскольку осредненные величины существенно зависят от угла и их минимальное значение равно нулю, удобно для вычислений найти их оценки сверху

$$\overline{u_1 v_1} = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2 \left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1 \right) dt_1 \leq \frac{1}{2r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2 \left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1 \right) dt_1 \quad (1.14)$$

$$\overline{u_1^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2 \left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1 \right) dt_1 \leq \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2 \left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1 \right) dt_1 \quad (1.15)$$

$$\overline{v_1^2} = \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2 \left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1 \right) dt_1 \leq \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2 \left(\frac{ctg \varphi}{\lambda} - t_1 \right) dt_1 \quad (1.16)$$

Легко видеть, пользуясь оценками сверху, что $\psi_k = 0.5$, $r \rightarrow 0$, что хорошо совпадает с экспериментом. Такой подход обоснован, так как в экспериментах, как правило, делают выборки из полученных данных и часто берут максимальные величины для квадратов амплитуд пульсаций, Репик и Соседко [41].

Найденные выражения для сингулярного решения (1.11) напоминают источник с переменной интенсивностью f , поэтому актуален вопрос о количестве жидкости протекающей через полуокружность малого радиуса r вблизи сингулярной точки. Зная

выражения для скоростей, удобно ввести в рассмотрение возмущенную функцию тока ψ_1 , которая вблизи начала координат имеет вид

$$\psi_1 = \int_0^{\varphi} f\left(\frac{\text{ctg}\theta}{\lambda} - t_1\right) d\theta + \dots = \lambda \int_{\xi}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{1 + \lambda^2 (\xi + t_1)^2} + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.17)$$

$$\psi_1(\pi, t_1) = \int_0^{\pi} f\left(\frac{\text{ctg}\theta}{\lambda} - t_1\right) d\theta + \dots = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{1 + \lambda^2 (\xi + t_1)^2} + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.18)$$

Из формулы (1.18) следует, что если функция f произвольна, но такова, что в некоторый начальный момент времени $\psi_1(\pi, t_0) = 0$, то уже в любой следующий момент времени расход перестает быть нулевым $\psi_1(\pi, t_1 > t_0) \neq 0$. Таким образом, найденное сингулярное решение не допускает произвольную интенсивность источника f , т.к. жидкость предполагается несжимаемой. Для определения функции f необходимо рассмотреть следующее квадратичное приближение в разложениях (1.4)-(1.6).

Второе приближение в основной части ПС

Подставляя (1.4)-(1.6) в уравнения Навье-Стокса (1.1)-(1.3) и совершая предельный переход $\text{Re} \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, можно выделить систему уравнений для возмущений второго порядка

$$\nabla^2 p_2 = -2 \frac{du_0}{dy_1} \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right)^2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = - \frac{\partial p_2}{\partial y_1} - u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{1}{\text{Re} \cdot \delta^{3/2}} \nabla^2 v_1 \quad (1.20)$$

$$y_1 = 0: \quad v_2 = 0, \quad y_1^2 + x_1^2 \rightarrow \infty: \quad p_2 \rightarrow 0, \quad v_2 \rightarrow 0 \quad (1.21)$$

Обратим внимание, что линейные уравнения для возмущений v_2 , p_2 отделяются как и в первом приближении, а возмущение продольной скорости u_2 является вторичным и находится из уравнения неразрывности. Отметим, что уравнение неразрывности (1.19) содержит производную от базовой продольной скорости, поэтому надо представить вертикальную скорость в виде суммы скоростей от быстрых и медленных переменных $v_2 = v_{21}(x_1, y_1, t_1) + v_{20}(x, y_1)$. Скорость v_{20} будет удовлетворять уравнению неразрывности

для медленных переменных $\partial v_{20}/\partial y_1 + \partial u_0/\partial x = 0$, а v_{21} будет удовлетворять системе уравнений от быстрых переменных. Невязкие операторы (1.19)-(1.20) в точности совпадают с системой (1.7)-(1.8), однако содержат неоднородности, обусловленные квадратичными членами. Также в уравнении импульса (1.20) формально оставлен, вообще говоря, внепорядковый член, обусловленный действием вязкости. Можно оценить величину параметра $Re \cdot \delta^{3/2}$ для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине, опираясь на экспериментальные данные Шлихтинг [31]. В частности для воздуха, обтекающего плоскую пластину имеем $Re = 3.5 \cdot 10^6$, $L = 1m$, $\delta = 18mm \rightarrow Re \cdot \delta^{3/2} \approx 8450$, здесь толщина пограничного слоя определялась традиционно, как и в ламинарном случае, и за толщину бралась координата при которой скорость отличалась на 1% от внешней скорости. Напомним, что характерный поперечный размер в ламинарном случае $\delta \sim Re^{-1/2}$ и он в пять раз меньше реальной толщины пограничного слоя $5Re^{-1/2}$. Поэтому будем изучать случаи, в которых $Re \cdot \delta^{3/2} = 1000 \div 10.000$.

Квадратичные члены в (1.19)-(1.20) это сложные произведения суммы Рэлеевских решений и сингулярных (1.10), поэтому для полного анализа возмущений второго порядка надо знать как приходящие пульсации спереди, так и сингулярные возмущения в исследуемой точке. Однако вблизи стенки из этой суммы Рэлеевских и сингулярных решений, будут доминировать именно сингулярные, так как они неограниченно возрастают при подходе к стенке. Соответственно можно проанализировать систему (1.19)-(1.20) при $r \rightarrow 0$ безотносительно к Рэлеевским решениям. В частности можно вычислить неоднородности в уравнениях (1.19)-(1.20), используя асимптотику сингулярного решения (1.11)

$$\nabla^2 p_2 = -2 \frac{du_0}{dy_1} \cdot \frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right)^2 = -2\lambda \frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} - \frac{2}{r^4} f^2 + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_{21}}{\partial x_1} = -\frac{\partial p_2}{\partial y_1} + \frac{1}{r^3} \left[\sin \varphi f^2 + \frac{1}{Re \delta^{3/2}} (\sin \varphi f''_{\varphi\varphi} + 2 \cos \varphi f'_{\varphi}) \right] + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.23)$$

Отталкиваясь от вида неоднородностей будем искать v_2 , p_2 вблизи стенки в виде

$$v_{21} = \frac{V(\varphi, t_1)}{r^3} + \dots, \quad p_2 = \frac{p(\varphi, t_1)}{r^2} + \dots, \quad r \rightarrow 0 \quad (1.24)$$

В результате подстановки указанных разложений в (1.22)-(1.23) можно выделить систему уравнений

$$p''_{\varphi\varphi} + 4p = 2\lambda(3 \cos \varphi \cdot V + \sin \varphi \cdot V'_{\varphi}) - 2f^2 = L \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t_1} - \lambda \sin^2 \varphi \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 3\lambda \sin \varphi \cos \varphi \cdot V + 2 \sin \varphi p - \cos \varphi p'_{\varphi} + \\ &+ \sin \varphi f^2 + \frac{1}{\operatorname{Re} \delta^{3/2}} (\sin \varphi f''_{\varphi\varphi} + 2 \cos \varphi f'_{\varphi}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$V(0, t_1) = 0, \quad V(\pi, t_1) = 0 \quad (1.27)$$

Решение уравнения (1.25) можно представить в виде интеграла от правой части и подставить в уравнение (1.26), в результате задача будет сведена к единственному уравнению в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t_1} - \lambda \sin^2 \varphi \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} &= 3\lambda \sin \varphi \cos \varphi \cdot V - \int_0^{\varphi} L \cos(3\varphi - 2\theta) d\theta + \\ &+ \sin \varphi f^2 + \frac{1}{\operatorname{Re} \delta^{3/2}} (\sin \varphi f''_{\varphi\varphi} + 2 \cos \varphi f'_{\varphi}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Для того чтобы точно проинтегрировать данное уравнение, удобно ввести вспомогательную функцию $G = V''_{\varphi\varphi} + 9V$, уравнение для которой примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t_1} - \lambda \sin^2 \varphi \cdot \frac{\partial G}{\partial \varphi} &= 5\lambda \sin \varphi \cos \varphi \cdot G + 4 \cos \varphi \frac{\partial f^2}{\partial \varphi} + \sin \varphi \frac{\partial^2 f^2}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{1}{\operatorname{Re} \delta^{3/2}} (\sin \varphi f^{IV}_{\varphi} + 4 \cos \varphi f'''_{\varphi} + 4 \sin \varphi f''_{\varphi} + 16 \cos \varphi f'_{\varphi}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Полученное уравнение может быть проинтегрировано аналитически, Смирнов [42], для произвольной функции f , и в результате можно вычислить нормальную к поверхности скорость V в любой момент времени. В частности оказывается, что для произвольной функции f невозможно удовлетворить условию непротекания в любой момент времени на поверхности пластины, даже если в некоторый начальный момент времени оно удовлетворялось. Как следствие, возникает вопрос об условии разрешимости для задачи (1.29). Обратим внимание, что от времени зависит только линейный оператор переноса в левой части уравнения, неоднородная же часть содержит только операции дифференцирования по углу. В результате можно потребовать, чтобы в некоторый момент времени $t_1 = 0$ неоднородная часть уравнения (1.29) в точности равнялась нулю. Тогда для функции f можно выделить уравнение и после двукратного интегрирования получим

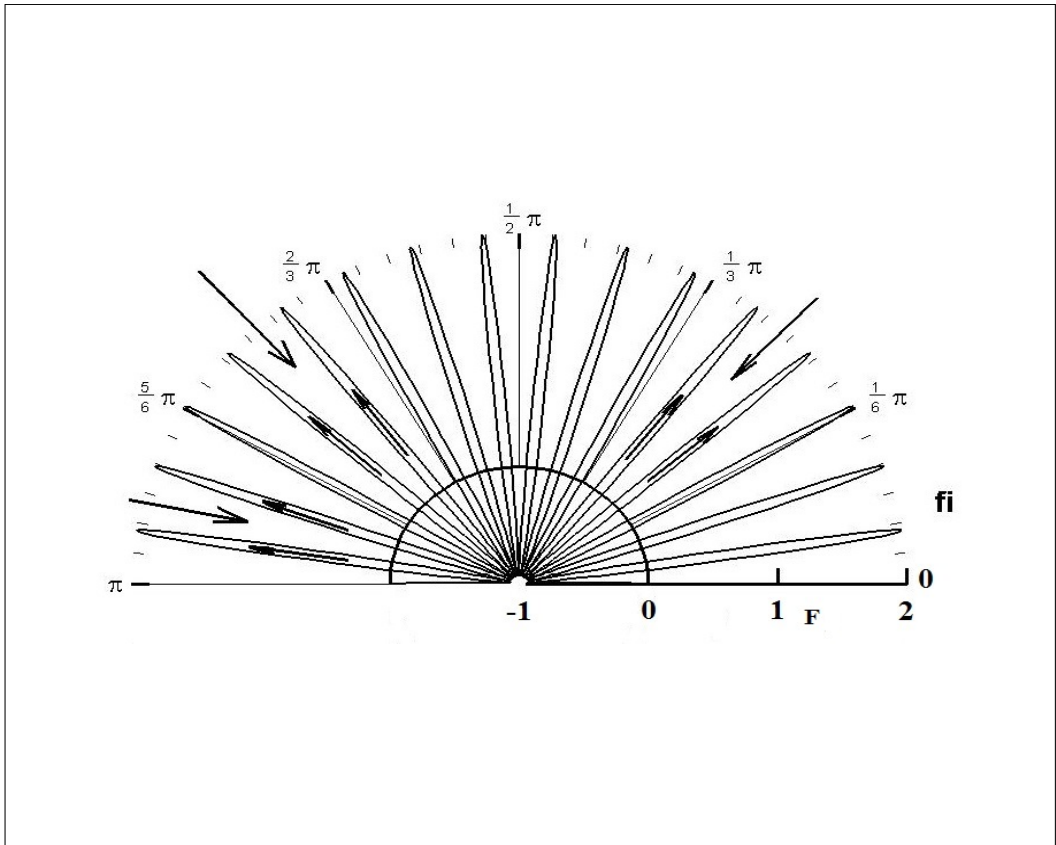
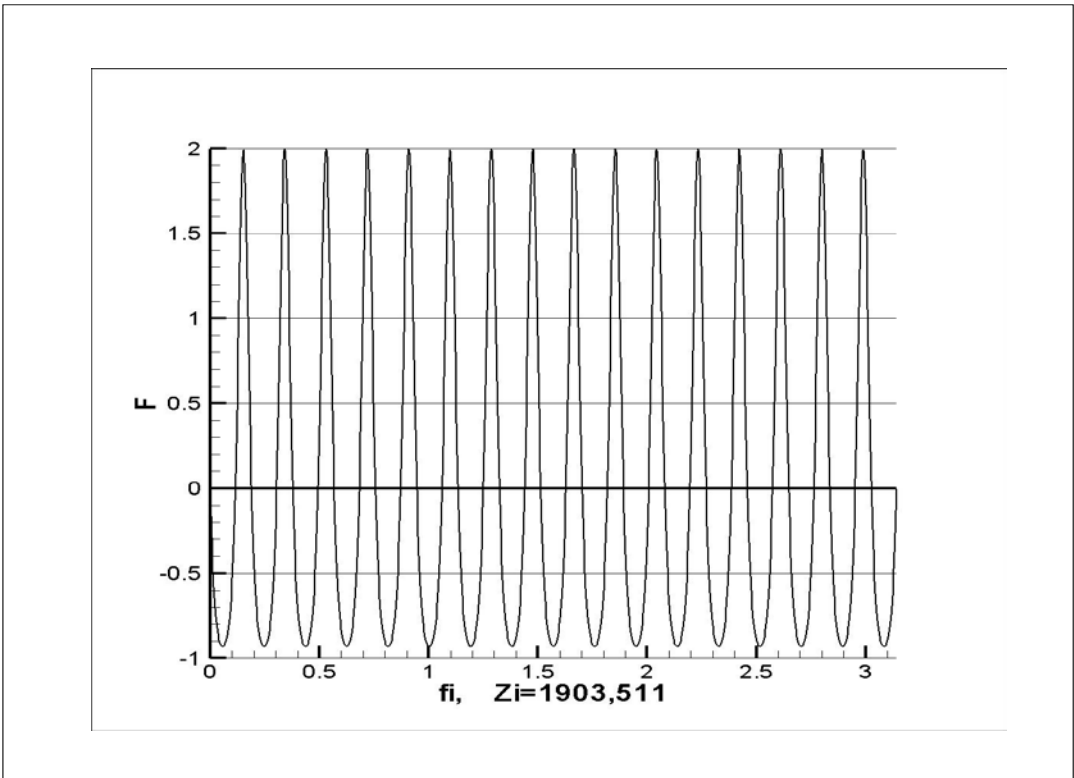
$$f^2 + \frac{1}{\operatorname{Re} \delta^{3/2}} (f''_{\varphi} + 4f) = A(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 \varphi) + B^2 \quad (1.30)$$

В данном уравнении появились две произвольные константы, первую константу пока положим равной нулю $A = 0$, т.к. она соответствует, по-видимому, проницаемой стенке, а вторую нет. После замены переменных $f = B \cdot F$ получим следующую задачу

$$F'' + 4F + Z \cdot (F^2 - 1) = 0, \quad Z = \text{Re} \delta^{3/2} B$$

$$F(0) = F(\pi) = 0, \quad Q = \int_0^{\pi} F d\varphi = 0 \quad (1.30)$$

Легко видеть, что в результате получилось уравнение Гамеля [43], область определения решения $\varphi = 0 \div \pi$, а так как это вязкое решение, то потребуем на границах выполнение условий прилипания. Важно отметить, что формально внепорядковый вязкий член в (1.20) играет решающую роль в построении задачи (1.30), т.к. только он и дает нетривиальное, вязкое решение вблизи стенки. Уравнение Гамеля второго порядка и при заданном параметре Z и двух граничных условиях решение однозначно определяется. Однако нас не устраивает любое решение, и, так как жидкость несжимаемая потребуем равенство нулю расхода через малую полуокружность вокруг начала координат. Тогда окажется, что решение существует не для всех Z , а для некоторого счетного нарастающего набора чисел. Вспомним, что $\text{Re} \cdot \delta^{3/2} = 1000 \div 10.000$ в турбулентном пограничном слое, то есть оказывается, что параметр Z заведомо большая, но **искомая** величина. Хорошо известно, что при больших значениях параметра решение уравнения Гамеля становится быстро осциллирующей знакопеременной функцией, период которой становится бесконечно малым с ростом параметра, Гольдштик [44]. Различные режимы расчета задачи Гамеля приведены в Акуленко и др. [45-47], к сожалению не совпадающие с рассматриваемым течением. Задача (1.30) была решена численно для ряда значений Z , в частности на Фиг. 4 приведено решение в прямоугольных и полярных координатах при $Z = 1903.511$. Из графика видно, что из вязкой области вытекает 16 струек жидкости, а втекает 17 струек, суммарный расход нулевой и выполняются условия прилипания. Вытекающие струйки заметно тоньше и их скорости выше, чем втекающие. Совершенно ясно, что с ростом числа Рейнольдса количество струек будет нарастать и требуются систематические расчеты, чтобы найти спектр параметра Z .



Фиг. 4. Типичное решение уравнения Гамеля при больших значениях параметра.

После того как найдено решение задачи $F = F_i(\varphi)$, $Z = Z_i$ при $t_1 = 0$, можно вычислить $F = F_i(\text{ctg}\varphi/\lambda) \rightarrow F_i(\text{ctg}\varphi/\lambda - t_1)$, и как следствие найти решение в любой момент времени. Данная замена переменных не меняет свойство быстрых осцилляций у решения задачи, поэтому расход жидкости по малой полуокружности вокруг начала координат в любой конечный момент времени будет нулевым с точностью до поправок более высокого порядка. Аналогичное замечание справедливо и для скорости V в задаче (1.29), то есть в любой конечный момент времени условие непротекания будет выполняться для быстро осциллирующих решений с точностью до малых более высокого порядка. Важно отметить, если найдено решение $F = F_i(\varphi)$, $Z = Z_i$, то можно установить порядок величины толщины турбулентного пограничного слоя

$$\delta \sim \left(\frac{Z_i}{\text{Re}} \right)^{2/3} \quad (1.31)$$

Таким образом, вблизи сингулярной точки на дне пограничного слоя происходит интенсивный обмен жидкостью между малой вязкой пристенной зоной и основной частью пограничного слоя. Множество тонких струек направлены в вязкую зону и столько же из нее. Причем это собственное нелинейное решение уравнений Навье-Стокса. Для реальных турбулентных течений параметр в уравнении Гамеля может принимать очень большие величины, причем, по-видимому, существует нелинейный спектр допустимых решений. Какое решение выбрать, невозможно установить на данном этапе исследования. Необходимо рассматривать вязкую нелинейную квадратную область на дне пограничного слоя.

2. ВЯЗКАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ОБЛАСТЬ НА ДНЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

До этого момента, анализировалась квадратная невязкая область с характерным размером порядка толщины пограничного слоя. В этой области обычно рассматривают крупномасштабные вихри, сносимые вниз по потоку из зоны перехода и зон предшествующих данной. Однако, как указано в предыдущей части работы, решение линейной задачи для пульсаций состоит из суммы Рэлеевских возмущений и найденных сингулярных, отвечающих за взаимодействие крупномасштабных вихрей со стенкой, а точнее с малой квадратной вязкой областью вблизи начала координат. Это взаимодействие описывается решением уравнения Гамеля с большим, но конечным

параметром. Подобные решения Гамеля это быстро осциллирующие функции, что означает много вытекающих струек жидкости в малую вязкую зону и столько же вытекающих, так что суммарный расход через малую полуокружность, охватывающую начало координат нулевой. Такой интенсивный обмен жидкостью действительно характерен для пристенной зоны в турбулентном пограничном слое. Для того чтобы доказать приведенные рассуждения рассмотрим вязкую зону отдельно. Учтем, что при приближении к стенке, базовая скорость убывает линейно, а сингулярное возмущение нарастает. Соответственно найдется размер вязкой зоны, при котором нарушится справедливость асимптотических разложений (1.4)-(1.6) и решение станет нелинейным. Ищем асимптотическое разложение решения в ней в виде

$$u = \delta^{1/4}U(x_2, y_2, t_1) + \dots, \quad v = \delta^{1/4}V(x_2, y_2, t_1) + \dots, \quad p = \delta^{1/2}P(x_2, y_2, t_1) + \dots \quad (2.1)$$

$$y_2 = y / \delta^{5/4}, \quad x_2 = x / \delta^{5/4}, \quad t_1 = t / \delta \quad (2.2)$$

После подстановки разложений в уравнения Навье-Стокса (1.1)-(1.3) и совершения предельного перехода получим задачу

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y_2^2} = -2 \frac{\partial U}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_2} - 2 \left(\frac{\partial V}{\partial y_2} \right)^2 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t_1} + U \frac{\partial V}{\partial x_2} + V \frac{\partial V}{\partial y_2} = - \frac{\partial P}{\partial y_2} + \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2} \right) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial y_2} = 0 \quad (2.5)$$

$$y_2 = 0: \quad U = V = 0; \quad r = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \rightarrow \infty: \quad U = \lambda y_2 + \frac{\cos \varphi}{r} f\left(\frac{\text{ctg} \varphi}{\lambda} - t_1\right) + \dots, \quad (2.6)$$

$$V = \frac{\sin \varphi}{r} f\left(\frac{\text{ctg} \varphi}{\lambda} - t_1\right) + \dots, \quad P = 2\lambda \int_0^\varphi \sin^2 \theta \cdot f\left(\frac{\text{ctg} \theta}{\lambda} - t_1\right) d\theta + \dots$$

Граничные условия следуют из сращивания решений в вязкой и невязкой областях. Таким образом, вместо тонкого ламинарного подслоя на дне турбулентного пограничного слоя получена квадратная малая вязкая область, взаимодействующая с вихрями в основной части пограничного слоя. Это очень важное отличие от асимптотических моделей нестационарных течений, в которых рассматриваются тонкие вязкие слои со взаимодействием. В частности Смит [48] показал неизбежность появления особенностей в решении в конечный момент времени в таких задачах и указал, что только учет поперечного перепада давления позволит разрешить эту проблему. Решение в этой

квадратной области удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса с эффективным числом Рейнольдса $Re \cdot \delta^{3/2} = 1000 \div 10.000$. Решение задачи следует ожидать ламинарным, в силу умеренно больших величин параметра $Re \cdot \delta^{3/2}$. Если найден параметр Z_i и соответствующее решение задачи Гамеля $f_i(\varphi)$ в граничных условиях (2.6), то следует проверить имеет ли задача (2.3)-(2.6) решение для всех моментов времени. Если нет, то надо перебрать различные варианты решений Z_i и, возможно, удастся отобрать верное решение или решения. Не исключено, что существует спектр возможных нелинейных решений Z_i . На это указывают экспериментальные замеры толщины турбулентного пограничного слоя с ростом числа Re , а именно, с ростом числа Рейнольдса на порядки, толщина пограничного слоя убывает в разы. Отсюда сразу следует, что параметр Z_i может с ростом числа Рейнольдса возрастать на порядки. Хорошо известно, что турбулентный пограничный слой существует при любых числах Рейнольдса выше критического, значит найдутся решения для соответствующих больших величин Z_i . Нельзя исключить перескок решения в турбулентном пограничном слое от одних величин Z_i , к более высоким по мере развития пограничного слоя вдоль пластины.

ВЫВОДЫ

В работе построена самосогласованная асимптотическая теория двумерного турбулентного пограничного слоя на плоской пластине при больших числах Рейнольдса. Подтверждено, что турбулентный пограничный слой делится на основную невязкую часть, содержащую быстрые пульсации относительно основного (осредненного) профиля продольной скорости и вязкий ламинарный подслой. Однако найдено, что вязкий ламинарный подслой не является традиционным тонким слоем, а состоит из набора малых квадратных подобластей, решение в каждой из которых удовлетворяет полным уравнениям Навье-Стокса. Определены асимптотические величины толщины турбулентного пограничного слоя и ламинарного подслоя. Найден, существенно нестационарный механизм взаимодействия основной, пульсационной части турбулентного пограничного слоя и малой вязкой области на обтекаемой поверхности. Это взаимодействие описывается спектром решений уравнения Гамеля с большим, но конечным значением параметра и означает интенсивный обмен жидкостью между этими областями. Решение оказывается быстро осциллирующей функцией, которая описывает множество тонких струек, как втекающих в вязкую область, так и вытекающих из нее.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Reynolds O.* An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1883. **174**. 935-982.
2. *Reynolds O.* On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // *Phil. Trans. Roy. Soc.* 1895. **186**. A 123.
3. *Prandtl L.* Uber die ausgebildete Turbulenz // *ZAMM*. 1925. 5. 136-139.
4. *von Karman T.* Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz // *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math.-Phys.* 1930. K1. 58-76.
5. *Burgers J.M.* Proceedings of the First International Congress for Applied Mechanics. 1924. Delft. 113.
6. *van der Hegge Zijnen B.G.* Measurements of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface // *Abstract*. Delft. 1924.
7. *Hansen M.* Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eigentauchten Platte // *Z. angew. Math. Mech.* 1928. 8. No. 2. 185-199.
8. *Rayleigh* On the stability, or instability, of certain fluid motions. // *Sci. Papers*. Cambridge: Univ. Press. 1880. **1**. 474-487.
9. *Orr W. McF.* The stability or instability of the steady motions of a liquid // *Proc. Roy. Irish Acad.* 1906. **A27**. 9-27. 69-138.
10. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // *Atti del 4. Congr. Internat. Dei Mat.* 1908. Vol. III. 116-124. Roma.
11. *Tollmien W.* Über die Entstehung der Turbulenz // 1. Mitteilung, *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys.* 1929. Klasse. 21-44.
12. *Schlichting H.* Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung // *Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys.* 1933. Klasse. 182-208.
13. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР*. 1941. 30. № 4. 299-303.
14. *Обухов А. М.* О распределении энергии в спектре турбулентного потока // *Изв. АН СССР, сер. Геогр. Геофиз.* 1941. 5. № 4-5. 453-466.
15. *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* *Механика сплошных сред*. М.: Гостехиздат, 1953.
16. *Prandtl L.* Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung // *VDI*. 1933. #5.
17. *Изаксон А. А.* О формуле распределения скоростей вблизи стенки // *Журнал exper. и теорет. Физики (ЖЭТФ)*. 1937. Т.7. Вып. 7. С. 919-024.

18. *Millikan C. B.* A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes // Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech. 1939. N. Y.: Wiley. P. 386-392.
19. *Yajnik K. S.* Asymptotic theory of turbulent shear flows // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt. 2. P. 411-427.
20. *Mellor G. L.* The large Reynolds number, asymptotic theory of turbulent boundary layers // Intern. J. Engng. Sci. 1972. 10(10). 851–873.
21. *Fendel F. E.* Singular perturbation and turbulent shear flow near walls // J. Astronaut. Sci. 1972. V. 20. No. 3. P. 129-165.
22. *Afzal N.* A sub-boundary layer within a two dimensional turbulent boundary layer: an intermediate layer // J. Mech. Theor. Appl. 1982. V. 1. No. 6. P. 963-973.
23. *Пономарев В. И.* Асимптотический анализ турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости // Учен. Записки ЦАГИ. 1975. Т. 8. № 3. С. 42-50.
24. *Сычев В. В. и Сычев Вик. В.* О структуре турбулентного пограничного слоя // ПММ. 1987. Т. 51. вып. 4. С. 593-599.
25. *Сычев В. В. и Сычев Вик. В.* О турбулентном отрыве // ЖВММФ. 1980. Т. 20. № 6. С. 1500-1512.
26. *Scheichl B., Kluwick A.* Turbulent Marginal Separation and the Turbulent Goldstein Problem // AIAA Journal. 2007. **45**.
27. *Smith, F.T., Scheichl, B. & Kluwick, A.* On turbulent separation // J. Eng. Math. 2010. Vol. 68. Issue 3. P. 373-400.
28. *Егоров И. В., Судаков В. Г., Федоров А. В.* Численное моделирование распространения возмущений в сверхзвуковом пограничном слое // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 6. С. 33-44.
29. *Zametaev V. B., Gorbushin A. R.* Evolution of vortices in 2D boundary layer and in the Couette flow // AIP Conference Proceedings. 2016. 1770. 030044.
doi: 10.1063/1.4963986.
30. *Reichardt H.* Messungen turbulenter Schwankungen // Naturwissenschaften. 1938. 404.
31. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
32. *Schubauer G. B., Klebanoff P. S.* Contributions on the mechanics of boundary layer transition // NASA TN. 1955. 3489.
33. *Сычев В. В.* О ламинарном отрыве // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа. 1972. 3. 47-59.
34. *Сычев В. В., Рубан А. И., Сычев Вик. В., Королев Г. Л.* Асимптотическая теория отрывных течений. М.: Наука. Гл. ред. Физ. Мат литер., 1987.

35. *Нейланд В. Я., Боголенов В. В., Дудин Г. Н., Липатов И. И.* Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
36. *Stewartson K., Williams P. G.* Self-induced separation // Proc. Roy. Soc. London A. 1969. Vol. 312. 181-206.
37. *Messiter A. F.* Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM Journ. on Appl. Math. 1970. Vol. 18. No. 1. Pp. 241-257.
38. *Рубан А., И.* Сингулярное решение уравнений пограничного слоя, которое может быть непрерывно продолжено через точку нулевого трения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. 63.
39. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: МИР, 1984.
40. *Klebanoff P. S.* Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // NASA Rep. 1955. 1247.
41. *Репик Е. У., Соседко Ю. П.* Турбулентный пограничный слой. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
42. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. 5 изд. М.: Гос. Изд-во Физико-матем. Литературы, 1958.
43. *Hamel G.* Spiralförmige bewegung zaher flüssigkeiten // Jahresber. D. Dt. Mathematiker-Vereinigung. 1916. **25**. 32-60.
44. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н., Яворский Н. И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука. Сиб. Отдел., 1989.
45. *Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Кумакшев С. А.* Решения задачи Джеффри-Гамеля регулярно продолжимые по числу Рейнольдса // Изв. РАН. МЖГ. 2004. № 1. С. 15-32.
46. *Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А.* Бифуркация основного стационарного течения вязкой жидкости в плоском расходящемся канале // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 3. С. 25-36.
47. *Акуленко Л. Д., Кумакшев С. А.* Бифуркация мульти модовых течений вязкой жидкости в плоском расходящемся канале // Прикл. Мат. Мех. 2008. Т. 72. № 3. С. 431-441.
48. *Smith F. T.* Finite-time break-up can occur in any unsteady interacting boundary layer // Mathematika. 1988. 35. pp. 256-273.