



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2015 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А., Козубская Т.К.

Модификация схемы Flux
Corrector для повышения
точности решения
нестационарных задач

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахвалов П.А., Козубская Т.К.
Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 69. 22 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-69>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

П. А. Бахвалов, Т. К. Козубская
Модификация схемы Flux Corrector
для повышения точности
решения нестационарных задач

Москва — 2015

Бахвалов П. А., Козубская Т. К.

Модификация схемы Flux Corrector для повышения точности решения нестационарных задач

В работе предлагается модификация схемы Flux Corrector (FC) для решения линеаризованных уравнений Эйлера на неструктурированных симплицеальных сетках. Оригинальная схема FC обладает третьим порядком точности только на стационарных решениях, тогда как на нестационарных — только вторым. Предлагаемая модификация не меняет стационарных решений схемы FC, но обладает третьим порядком на трансляционно-симметрических сетках для нестационарных задач. Несмотря на то, что на произвольной сетке в нестационарном случае порядок схемы остаётся равным двум, по величине ошибки она существенно улучшает оригинальную схему FC.

Ключевые слова: схема повышенной точности, неструктурированная сетка, вычислительная газовая динамика

Pavel Alexeevich Bakhvalov, Tatiana Konstantinovna Kozubskaya

Modification of Flux Corrector method for accuracy improvement on unsteady problems

In the paper we introduce the modification of Flux Corrector (FC) method for solving linearized Euler equations on unstructured simplicial meshes. The original FC method possesses the third order of accuracy only on steady solutions and the second order otherwise. Our modification does not change steady solutions of the FC method but has the third order on translationally-symmetric meshes for unsteady problems. Despite the second order of the scheme on arbitrary meshes for unsteady problems we show that the accuracy becomes significantly better than in the original FC method.

Key words: high-accuracy scheme, unstructured mesh, computational fluid dynamics

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 15-01-07911-а.

Введение

До недавнего времени схемы выше 2-го порядка точности на неструктурированной сетке для решения задач газовой динамики были представлены, главным образом, двумя классами: конечно-объемными схемами с полиномиальной реконструкцией переменных (FV) [1] [2] [3] [4], включая их спектральную модификацию – SV [5], и схемами на основе метода Галёркина с разрывными базисными функциями (DG) [6] [7], включая спектральные методы SD [8] [9] [10] [11]. Несмотря на большое количество работ по развитию этих схем, они остаются весьма ресурсоемкими, что особенно проявляется при решении задач с разрывами. Альтернативой этим схемам являются схемы Годуновского типа 2-го порядка точности, широко применяемые для решения задач аэродинамики в большинстве известных программных комплексов.

Своего рода компромиссом между дешёвыми схемами 2-го порядка и вычислительноёмкими схемами выше 2-го порядка являются EBR-схемы [12] [13]. В этих схемах все переменные определяются в сеточных узлах, по одному набору на узел, а сама схема строится в рамках рёберно-ориентированного подхода на основе формулы Гаусса-Грина [14]. EBR-схемы обладают 3-м или 5-м порядком точности на трансляционно-симметрических (TS-) сетках (т. е. сетках, инвариантных относительно трансляции на величину любого своего ребра). Такие сетки могут быть получены только однородным разбиением на симплексы равномерной сетки из параллелограммов или параллелепипедов. На произвольной же неструктурированной сетке EBR-схемы обладают 2-м порядком точности. Таким образом, во-первых, EBR-схемы позволяют сочетать в рамках одной схемы как высокую точность на TS-сетках, так и возможность расчёта на неструктурированных сетках. А, во-вторых, использование расширенного шаблона позволяет EBR-схемам на неструктурированных сетках уменьшить численную ошибку по сравнению с другими схемами 2-го порядка.

В 2011 году в работе [15] предложена новая схема 3-го порядка точности на неструктурированных сетках, позже названная методом коррекции потоков (Flux Corrector method, FC). Она также строится на основе формулы Гаусса-Грина. В работах [16] [17] [18] представлено обобщение предлагаемого метода на случай вязких задач. Достоинством этой схемы является простота её реализации и низкая вычислительная стоимость. Однако 3-й порядок точности достигается только на стационарных решениях, тогда как в нестационарном случае порядок опускается до 2-го даже для TS-сеток.

В настоящей работе предлагается модификация схемы FC, позволяющая частично сочетать её преимущества с достоинствами схем класса EBR. Новая схема обладает 3-м порядком точности и в стационарном случае на произвольной неструктурированной сетке, и в нестационарном случае на TS-сетках. Хотя на произвольной неструктурированной сетке для нестационарных задач точность

схемы по-прежнему остаётся ограниченной 2-м порядком, предлагаемая модификация позволяет добиться существенно меньшей ошибки, чем схема FC в том виде, как она была предложена в работе [15].

Схема Flux Corrector в одномерном случае

Рассмотрим аппроксимацию пространственной производной в одномерном уравнении переноса на неравномерной сетке с узлами $\{x_i\}$. Обозначим $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $\bar{h}_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$.

Общая формула для вычисления производной в сеточном узле, обеспечивающая консервативность получающейся разностной схемы, записывается в виде

$$[u'(x_i)] = \frac{1}{\bar{h}_i} (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}). \quad (1)$$

Чтобы обеспечить противопоточность аппроксимации, значения в полуцелых точках определяются как $u_{i\pm 1/2} = h(u_{i\pm 1/2-0}, u_{i\pm 1/2+0})$, где $h(u_L, u_R) = u_L$, если скорость переноса положительная, и $h(u_L, u_R) = u_R$, если скорость переноса отрицательная.

В одномерном случае схема Flux Corrector подразумевает вычисление потока по следующим предраспадным значениям:

$$u_{i+1/2-0} = u_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \frac{du}{dx}(x_i) \quad (2)$$

$$u_{i+1/2+0} = u_{i+1} - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \frac{du}{dx}(x_{i+1}) \quad (3)$$

Вспомогательные производные $du/dx(x_i)$ и $du/dx(x_{i+1})$ в сеточных узлах, участвующие в формулах (2) и (3), должны вычисляться не менее чем со 2-м порядком точности, а на равномерной сетке, если порядок в точности равен двум, — вырождаться в центральную разность. В одномерном случае этого легко добиться, вычисляя $du/dx(x_i)$ как производную от интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по узлам $i - 1$, i и $i + 1$. Далее для простоты будем предполагать, что все вспомогательные производные вычисляются точно.

Разложением в ряд Тейлора около точки x_i получаем, что

$$\begin{aligned} u_{i+1/2+0} &= u(x_i) + u'(x_i)h_{i+1/2} + \frac{1}{2}u''(x_i)h_{i+1/2}^2 + O(h^3) - \\ &\quad - \frac{1}{2}h_{i+1/2}(u'(x_i) + h_{i+1/2}u''(x_i) + O(h^2)) = \\ &= u(x_i) + \frac{1}{2}u'(x_i)h_{i+1/2} + O(h^3) = u_{i+1/2-0} + O(h^3). \end{aligned}$$

Таким образом, предраспадные значения слева и справа отличаются не более чем на величину порядка $O(h^3)$, что после деления на \bar{h}_i не внесёт в разностную схему ошибку более чем $O(h^2)$.

Теперь рассмотрим аппроксимацию производной. По только что доказанному соотношению между предраспадными значениями, заменим все предраспадные значения, с какой бы стороны они не вычислялись, на значения со стороны узла i :

$$[u'(x_i)] = \frac{1}{\bar{h}_i}(u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) = \frac{1}{\bar{h}_i}(u_{i+1/2-0} - u_{i-1/2+0}) + O(h^2)$$

Подставляя выражения для $u_{i+1/2-0}$ и $u_{i-1/2+0}$, получаем

$$[u'(x_i)] = \frac{1}{\bar{h}_i}(u_i + h_{i+1/2}u'(x_i) - u_i + h_{i-1/2}u'(x_i) + O(h^3)) + O(h^2) = u'(x_i) + O(h^2),$$

то есть на произвольной неравномерной сетке схема имеет 2-й порядок аппроксимации.

Схема Flux Corrector в многомерном случае

В многомерном случае схема FC записывается на барицентрических контрольных объёмах. Общая формула для вычисления градиента в сеточном узле, обеспечивающая консервативность получающейся разностной схемы, записывается в виде

$$[\nabla u(x_i)] = \frac{1}{v_i} \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{n}_{ij} u_{ij}, \quad (4)$$

где $N_1(i)$ – множество узлов, соединённых с узлом i ребром, \mathbf{n}_{ij} — ориентированная внешним образом по отношению к узлу i площадь, ассоциированная с ребром ij , v_i – величина контрольного объёма узла i , а u_{ij} — значение потока в центре ребра, вычисляемое на основе двух предраспадных значений: $u_{ij} = h(u_{ij}^{(i)}, u_{ij}^{(j)})$. О построении барицентрических контрольных объёмов и определении геометрических коэффициентов v_i и \mathbf{n}_{ij} можно посмотреть, например, в [19].

Предраспадные значения вычисляются в центре ребра по формулам, аналогичным (2), (3):

$$u_{ij}^{(i)} = u_i + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \cdot \nabla u(\mathbf{r}_i), \quad (5)$$

$$u_{ij}^{(j)} = u_j + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \nabla u(\mathbf{r}_j), \quad (6)$$

где \mathbf{r}_i – радиус-вектор узла i , а градиент вычисляется с достаточной точностью. Если сетка не имеет сильной анизотропии, то он может вычисляться, например, дифференцированием полинома, построенного методом наименьших квадратов. В общем случае для его вычисления необходима специальная методика, см., например, [20].

Точность на линейной функции схемы FC (4), (5), (6) обеспечивается точностью на линейной функциях предраспадных значений в центре ребра (5) и (6) и свойством барицентрических контрольных объёмов. Поэтому, чтобы проверить точность на квадратичной функции, достаточно рассмотреть функции вида $u = (x - x_i)^a(y - y_i)^b(z - z_i)^c$, где $a + b + c = 2$. Каждое предраспадное значение на ребре ij со стороны узла i , вычисленное по формуле (5), будет равно нулю, так как $u(\mathbf{r}_i) = \nabla u(\mathbf{r}_i) = 0$. Предраспадное значение извне, как это было показано в одномерном случае, будет отличаться на величину $O(h^3)$. Это доказывает точность схемы на квадратичной функции в многомерном случае. Более подробно это доказательство см. в оригинальной работе [15].

Таким образом, производная по схеме FC на произвольной неструктурированной сетке аппроксимируется со 2-м порядком точности.

Схема Flux Corrector на TS-сетках

Второй порядок аппроксимации гарантирует второй порядок точности схемы при выполнении условия устойчивости. На неравномерных и неструктурированных сетках часто имеет место сверхсходимость, когда порядок точности оказывается выше, чем порядок аппроксимации. Это объясняется тем, что старший член аппроксимационной ошибки имеет дивергентный вид, то есть ошибка в соседних ячейках частично компенсирует друг друга.

На равномерной же сетке при использовании одинаковой схемы во всех точках этот эффект невозможен: порядок точности при выполнении условия устойчивости всегда совпадает с порядком аппроксимации. Поэтому необходимым условием наличия 3-го порядка точности на неструктурированной сетке является 3-й порядок аппроксимации на равномерной сетке. Обобщением равномерной сетки на симплицильную сетку в многомерном случае является понятие TS-сетки.

Трансляционно-симметрической сеткой (TS-сеткой) будем называть сетку, инвариантную относительно пространственной трансляции на величину любого своего ребра. Любая TS-сетка является однородным разбиением равномерной сетки из параллелограммов (2D) или параллелепипедов (3D).

Будем называть сегментом ломаную (2D) или многогранную поверхность (3D), являющуюся общей границей двух контрольных объёмов. Прежде всего

отметим, что граница медианного контрольного объёма на TS-сетке представляет собой набор пар противоположащих сегментов, ориентированная площадь которых равна по модулю и противоположна по направлению. Выберем из каждой пары сегментов один и обозначим за $N_1(i)/2$ соответствующее выбранным сегментам множество узлов. Тогда произвольную рёберно-ориентированную схему (в т. ч. схему FC) можно переписать в следующем виде:

$$[\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i = \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ik} u_{ik} = \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)/2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ik} (u_{ik} - u_{i\bar{k}}). \quad (7)$$

Здесь $i\bar{k}$ — сегмент, противоположащий сегменту ik .

Аппроксимация разности $u_{ik} - u_{i\bar{k}}$ наследуется из одномерной задачи. Будем предполагать, что направление характеристики не изменяется, то есть на обоих сегментах берётся предраспадной значение с одной и той же стороны. Тогда, пользуясь одномерной нотацией, вводя вектор ребра $\mathbf{e}_{ik} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i$ и обозначая за $h = e_{ik} = |\mathbf{e}_{ik}|$ его длину,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(u_{i+1/2-0} - u_{i-1/2-0}) &= \frac{1}{h} \left(u(x_i) + \frac{1}{2}hu'(x_i) - u(x_{i-1}) - \frac{1}{2}hu'(x_{i-1}) \right) = \\ &= \frac{1}{h} \left(u(x_i) + \frac{h}{2}u'(x_i) - u(x_i) + hu'(x_i) - \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u'''(x_i) - \right. \\ &\left. - \frac{h}{2}u'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{4}u'''(x_i) + O(h^4) \right) = u'(x_i) - \frac{h^2}{12}u'''(x_i) + O(h^3) \quad (8) \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение переноса вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 \quad (9)$$

и выпишем дифференциальное приближение для пространственной аппроксимации (7), используя дифференциальное приближение для разности потоков на противоположных рёбрах (8) и заменяя в нём одномерные производные на производные по направлению \mathbf{e}_{ij} :

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{FC} &= \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)/2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ik} e_{ik} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}_{ik}} - \frac{e_{ik}^2}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 \mathbf{e}_{ik}} \right) + O(h^3) = \\ &= \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ik})(\nabla u \cdot \mathbf{e}_{ik}) - \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)/2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ik} \frac{e_{ik}^3}{12} \frac{\partial^3 u}{\partial^3 \mathbf{e}_{ik}} + O(h^3) \quad (10) \end{aligned}$$

Используем свойство медианных контрольных объёмов (точность градиен-

та, вычисленного по формуле Гаусса-Грина [14] на линейной функции):

$$\frac{1}{2v_i} \sum_{k \in N_1(i)} n_{ik}^p e_{ik}^q = \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)/2} n_{ik}^p e_{ik}^q = \delta^{ik}$$

Поэтому первое слагаемое в формуле (10) в точности равно $\mathbf{a} \cdot \nabla u(\mathbf{r}_i)$. Ошибка аппроксимации, таким образом, представляется в виде

$$\begin{aligned} E^{FC} &= -\frac{1}{12} \frac{1}{v_i} \sum_{k \in N_1(i)/2} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_{ik} e_{ik}^3 \frac{\partial^3 u}{\partial^3 \mathbf{e}_{ik}} + O(h^3) = \\ &= -\frac{1}{12} \left(\sum_{k \in N_1(i)/2} \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{n}_{ik}}{v_i} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^3 u \right) + O(h^3) \end{aligned} \quad (11)$$

3-й порядок аппроксимации (и 3-й порядок точности) схемы Flux Corrector на TS-сетке на стационарных задачах объясняется тем, что выражение в скобках в (11) представляется в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k \in N_1(i)/2} \mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{n}_{ik}}{v_i} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^3 u &= C \left(\sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 \right) (\mathbf{a} \cdot \nabla) u = \\ &= -C \left(\sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned} \quad (12)$$

где $C = 1$ в одномерном, $C = 1/2$ в двумерном и $C = 1/4$ в трёхмерном случае. На стационарных решениях этот член обращается в 0, что и обеспечивает 3-й порядок аппроксимации согласно формуле (11).

Отметим, что если вместо медианных контрольных объёмов на равномерной сетке из прямоугольных треугольников с длиной катетов, равной 1, построить ортоцентрические контрольные объёмы, представляющие собой квадраты, то ошибка аппроксимации такой схемы запишется в виде

$$E = -\frac{1}{12} \left(a_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_y \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right)$$

и не будет производной по времени от какого бы то ни было выражения. Таким образом, в отличие от EBR-схем, схема FC даже на TS-сетке чувствительна к типу контрольных объёмов.

Проверим формулу (12) на TS-сетке. Для этого перепишем её, исключив операторы градиента и оставив только коэффициенты перед ними. При этом, так как операторы градиента перестановочны, выражение нужно симметризовать. Индексы ik при \mathbf{e}_{ik} и \mathbf{n}_{ik} и индекс i при v_i для краткости опущены.

$$\forall p, q, r, s \quad \sum_{k \in N_1(i)/2} \left(e^p e^q e^r \frac{n^s}{v} - \frac{C}{3} (e^p e^q \delta^{sr} + e^p e^r \delta^{sq} + e^q e^r \delta^{sp}) \right) = 0 \quad (13)$$

Формула (12) или (13) инварианта относительно любого невырожденного линейного преобразования сетки (\mathbf{n}_{ik}/v_i преобразуется как ковектор). А так как любые две 2- и 3-мерные TS-сетки могут быть совмещены линейными преобразованиями, то достаточно проверить эту формулу только на одной 2-мерной и одной 3-мерной TS-сетке. В двумерном случае зададим вектора \mathbf{e}_{ik} , такие что $k \in N_1(i)/2$, следующим образом:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Соответствующие им вектора \mathbf{n}_{ik} имеют следующий вид:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

В трёхмерном случае зададим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_4 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathbf{e}_5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{e}_6 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \mathbf{e}_7 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_2 &= \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/2 \\ -1/6 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_3 &= \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{n}_4 &= \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_5 &= \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_6 &= \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} & \mathbf{n}_7 &= \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Подстановка значений (14)–(17) в формулу (13) доказывает её для произвольной TS-сетки и, вместе с этим, третий порядок аппроксимации схемы FC на TS-сетках для стационарных решений.

Модификация схемы FC на TS-сетке для нестационарных задач

Будем рассматривать уравнение переноса вида (9). Запишем ещё раз дифференциальное приближение схемы на TS-сетке с учётом (12):

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i) + [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{FC} + \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 (\mathbf{a} \cdot \nabla) u = O(h^3)$$

Учтём, что $(\mathbf{a} \cdot \nabla) u = -\partial u / \partial t$, и сгруппируем слагаемые при производной по времени:

$$\left(1 - \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i)/2} (\mathbf{e}_{ik} \cdot \nabla)^2 \right) \frac{\partial u}{\partial t}(x_i) + [\mathbf{a} \cdot \nabla u]_i^{FC} = O(h^3) \quad (18)$$

Выражение в левой части (18) можно аппроксимировать матрицей $(I + M)$, умноженной на вектор искомых производных du_i/dt . Тогда получится следующая схема 3-го порядка для решения уравнения (9) на TS-сетках:

$$(I + M) \frac{du}{dt} + [\mathbf{a} \cdot \nabla u]^{FC} = 0 \quad (19)$$

На TS-сетках вторую производную по направлению каждого ребра легко определить по трём сеточным узлам: двум узлам этого ребра и третьему узлу, лежащему на продолжении этого ребра. Таким образом, для аппроксимации второй производной по направлению ребра на TS-сетке в узле i достаточно использовать значения только в узлах, соединённых с узлом i рёбрами. Таким образом, матрица $M = \{m_{ik}\}$ будет содержать следующие значения:

$$m_{ik} = \begin{cases} -C/12, & k \in N_1(i) \\ C |N_1(i)|/12, & k = i \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (20)$$

Задание матрицы M по формуле (20) позволяет добиться 3-го порядка аппроксимации для нестационарных задач на TS-сетках. При этом матрица $I + M$ симметрическая и имеет строгое диагональное преобладание.

Поскольку для расчёта по схеме (19) требуется решение системы линейных уравнений, будем называть схему (19) нестационарной модификацией схемы с коррекцией потоков с использованием обратной матрицы, (UFC-I, Unsteady Flux Corrector method with Inverse matrix).

Если матрицу M в схеме (19) приравнять к нулю, то мы получим обычную схему Flux Corrector.

Теперь, пользуясь тем, что $\|M\|_\infty < 1$ (в 2D $|N_1(i)| = 6$, $C = 1/2$, в 3D $|N_1(i)| = 14$, $C = 1/4$), представим выражение $(I + M)^{-1}$ в виде ряда по степеням M . При условии достаточной гладкости решения для сохранения 3-го порядка аппроксимации достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения. Таким образом, вместо равенства (19) мы получаем следующую разностную схему, которую будем называть нестационарной модификацией схемы с коррекцией потоков (Unsteady Flux Corrector, UFC):

$$\frac{du}{dt} + (I - M) [\mathbf{a} \cdot \nabla u]^{FC} = 0 \quad (21)$$

Модификация схемы Flux Corrector на неструктурированной сетке

Введём для удобства диагональную матрицу V , элементами которой являются объёмы сеточных ячеек v_i .

Рассмотрим систему уравнений после применения метода линий вида

$$V \frac{du}{dt} = Au, \quad (22)$$

где $V^{-1}A = [\mathbf{a} \cdot \nabla u]$ есть некоторая аппроксимация пространственного оператора. Попробуем обобщить схему UFC-I на случай неструктурированной симплициальной сетки, для чего запишем её в следующем виде с неопределённой пока матрицей M .

$$(I + M)V \frac{du}{dt} = Au. \quad (23)$$

Обозначим $P = (I + M)V$. Изучим вопрос, при каком условии применение матрицы M не влияет на консервативность разностной схемы и её точность на линейной функции.

Будем предполагать, что исходная система (22) является консервативной. Если ввести вектор $e = (1, \dots, 1)^T$, то условие консервативности записывается в виде $d/dt(e^T V u) = 0$ для любого вектора u . Или, что то же самое, $e^T A = 0$.

Условие консервативности модифицированной схемы (23) будет выполняться, если $e^T V P^{-1} A = 0$. Для этого достаточно, чтобы выполнялось равенство $e^T V P^{-1} = e^T$; умножая это равенство справа на P , получаем $e^T P = e^T V$. Таким образом, достаточным условием консервативности является равенство суммы элементов в k -ом столбце матрицы P объёму ячейки v_k . Для матрицы M это условие переписывается в виде $M^T e = 0$ или $(MV)^T e = 0$. Видно, что в

случае TS-сеток, если M задаётся по формуле (20), это условие выполняется.

Теперь рассмотрим условие точности на линейной функции. Пусть $u = \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}$, где \mathbf{b} – некоторый вектор, не зависящий от координат. Производная по направлению \mathbf{a} от этой функции, умноженная на $|\mathbf{a}|$, равна $(\mathbf{a} \cdot \nabla)u = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \lambda$. Если обозначить сеточную проекции функции u за \hat{u} , точность схемы (22) на линейной функции запишется в виде $v_i \lambda = (A\hat{u})_i$ или, иначе,

$$V\lambda e = A\hat{u}. \quad (24)$$

Условие точности на линейной функции для модифицированной схемы (23) можно записать по аналогии: $P\lambda e = A\hat{u}$. С использованием (24) оно переписывается в виде $Pe = Ve$. Таким образом, для точности полученной схемы на линейной функции нужно, чтобы сумма элементов в i -ой строке матрицы P была равна объёму ячейки v_i . Для матрицы M это условие переписывается в виде $(MV)e = 0$. Видно, что в случае TS-сеток, если M задаётся по формуле (20), это условие также выполняется.

Теперь рассмотрим схему UFC с использованием прямой матрицы. Если записать её в виде

$$V \frac{du}{dt} = (I - M)Au, \quad (25)$$

то аналогичными рассуждениями можно вывести те же самые условия на матрицу M : для сохранения консервативности требуется $(MV)^T e = 0$, а для сохранения точности на линейной функции – $(MV)e = 0$.

На произвольной неструктурированной сетке применение матрицы M снижает порядок аппроксимации со 2-го до 1-го в случае нестационарных задач, однако, как будет видно из численных экспериментов, это не нарушает 2-го порядка сходимости.

Чтобы сохранить 3-й порядок на TS-сетке, будем определять матрицу P таким образом, чтобы в случае TS-сетки она совпадала с $(I + M)V$, где M определяется коэффициентами (20). Вторым и третьим условием, накладываемым на матрицу P , являются условия консервативности и точности на линейной функции. Даже если решаются задачи с гладкими решениями, то потеря консервативности привела бы к падению порядка точности до порядка аппроксимации, то есть в рамках рассматриваемого подхода, так или иначе, не позволила бы построить схему 3-го порядка на неструктурированной сетке. Потеря точности на линейной функции (например, явное использование коэффициентов вида (20)) приводит к схеме не выше 1-го порядка.

Одним из решений поставленной задачи является следующая матрица P с коэффициентами $\{p_{ik}\}$:

$$p_{ik} = \begin{cases} -\frac{C}{12} \frac{v_i + v_k}{2}, & k \in N_1(i) \\ v_i + \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i)} \frac{v_i + v_k}{2}, & k = i \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (26)$$

Матрица P является симметрической; легко убедиться, что сумма её элементов в строке равна v_i , а на TS-сетках предлагаемые коэффициенты p_{ik} совпадают с $v_i(m_{ik} + \delta_{ik})$, где m_{ik} задаются формулой (20), а δ_{ik} – символ Кронекера. Таким образом, все три наложенные условия выполняются.

Отметим также, что в одномерном и двумерном случаях вместо матрицы P , заданной формулой (26) можно пользоваться матрицей $\tilde{P} = (3I - G)/2$, где G – матрица масс метода Галёркина. Однако в трёхмерном случае этот подход не позволяет добиться 3-го порядка аппроксимации на TS-сетке. Это связано с тем, что рёбра трёхмерной TS-сетки неравноправны: часть из них инцидентна четырём тетраэдрам, а часть – шести.

Схема UFC сводится к домножению набора посчитанных по схеме FC производных $V^{-1}Au$ на матрицу $Q = V^{-1}(I - M)V = V^{-1}(2V - P)$, где P задаётся просто по формуле (26)¹.

Таким образом, на неструктурированной сетке схема UFC записывается в виде

$$\frac{du}{dt} + Q [\mathbf{a} \cdot \nabla u]^{FC} = 0, \quad (27)$$

где матрица Q имеет следующие коэффициенты q_{ik} :

$$q_{ik} = \begin{cases} \frac{C}{12} \frac{v_i + v_k}{2v_i}, & k \in N_1(i) \\ 1 - \frac{C}{12} \sum_{k \in N_1(i)} \frac{v_i + v_k}{2v_i}, & k = i \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (28)$$

Домножение вектора производных на матрицу Q занимает около 5% от времени счёта. Простота в реализации и низкие дополнительные затраты делают метод UFC весьма эффективным.

¹С точки зрения расчётного кода может быть удобно выполнять коррекцию до деления на объём, тогда нужно использовать матрицу $2I - PV^{-1}$.

Особо отметим, что решение стационарной задачи по схемам UFC и UFC-I совпадает с решением по оригинальной схеме FC и, следовательно, сохраняет её 3-й порядок точности.

Анализ в одномерном случае

Вернёмся к одномерному случаю. Предположим, что решается скалярное уравнение переноса со скоростью $\lambda = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (29)$$

то есть характеристика направлена вправо.

Рассмотрим неравномерную сетку с узлами x_i . Будем пользоваться введёнными выше обозначениями $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$, $\bar{h}_i = (x_{i+1} - x_{i-1})/2$. Постановкой граничных условий будем пренебрегать. Также будем считать, что градиенты в узлах, входящие в разностную схему, вычисляются точно.

Рассмотрим схему FC, модифицированную с использованием обратной матрицы (UFC-I). Аппроксимация уравнения (29) по схеме UFC-I в узле i определяется формулами (1), (2), (23), (26) и записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{h}_i} \left[\bar{h}_i \frac{du_i}{dt} + \frac{\bar{h}_i + \bar{h}_{i-1}}{24} \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{du_{i-1}}{dt} \right) + \frac{h_i + h_{i+1}}{24} \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{du_{i+1}}{dt} \right) + \right. \\ \left. + \left(u_i + \frac{h_{i+1/2}}{2} u'(x_i) - u_{i-1} - \frac{h_{i-1/2}}{2} u'(x_{i-1}) \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Пользуясь доказанным выше фактом, что схема FC точна на квадратичной функции, легко выписать дифференциальное приближение для этой схемы. Выражая из уравнения (29) $du_i/dt = -u'(x_i)$, получим следующий вид аппроксимационной ошибки:

$$\begin{aligned} E_i^{UFC-I} = \frac{1}{24\bar{h}} \left(h_{i-1/2}(\bar{h}_i + \bar{h}_{i-1}) u'' \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right) - \right. \\ \left. - h_{i+1/2}(\bar{h}_{i+1} + \bar{h}_i) u'' \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right) \right) + O(h^2). \end{aligned}$$

Видно, что на неравномерной сетке схема обладает 1-м порядком аппроксимации в максимальной норме (для сравнения, оригинальная схема FC имеет аппроксимационную ошибку 2-го порядка малости). Однако в негативной норме аппроксимационная ошибка имеет 2-й порядок малости как для оригинальной схемы FC, так и для её модификации UFC – I:

$$\|E^{UFC-I}\|_{-1} = \max_n \left| \sum_{i=1}^n E_i^{UFC-I} \bar{h}_i \right| \leq \frac{1}{12} \left| h_{1/2}(\bar{h}_0 + \bar{h}_1) u'' \left(\frac{x_1 + x_0}{2} \right) - \right.$$

$$-h_{n+1/2}(\bar{h}_n + \bar{h}_{n+1})u'' \left(\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \right) \Big| + O(h^2) = O(h^2)$$

Поскольку точность схемы, как правило, определяется негативной нормой её аппроксимационной ошибки [21] [22], то можно ожидать, что в одномерном случае предлагаемая схема обладает 2-м порядком точности на неравномерной сетке для нестационарных задач.

Аналогичные рассуждения можно провести и для схемы UFC (2), (23), (27), (28).

В проведённых ниже тестах будет продемонстрировано, что для модифицированной схемы с использованием как обратной, так и прямой матрицы, 2-й порядок точности имеет место и в многомерном случае.

Тестирование

Рассмотрим тестовую задачу для линеаризованных уравнений Эйлера на фоновом поле $\bar{\rho} = 1$, $\bar{\mathbf{u}} = 0$, $\bar{p} = 1/\gamma$. Начальные данные зададим в виде гауссиана по плотности и давлению:

$$\rho' = p' = \frac{1}{2} \exp \left(-\ln 2 \left(\frac{\mathbf{r}}{b} \right)^2 \right),$$

пульсации скоростей зададим нулевыми. Точное решение для этой задачи в двумерном случае вычисляется в виде интеграла по функциям Бесселя, а в трёхмерном случае выписывается явно.

В двумерном случае зададим $b = 12$ и будем проводить расчёт до времени $T = 40$, в трёхмерном случае будем проводить расчёт до времени $T = 20$ и зададим $b = 6$. Чтобы не допустить потери точности из-за границ и при этом избежать излишне большой расчётной области, в трёхмерном случае будем использовать периодические граничные условия; при этом начальные данные и точное решение переформулируются таким образом, что распространение акустической волны происходит не от одного начального импульса, а от решётки таких импульсов. Период по каждому направлению был задан равным 25.

В таблицах 1—4 приводятся результаты расчётов по схемам EBR3, EBR5, оригинальной схемой FC и предлагаемыми в настоящей работе её модификациями UFC-I и UFC. Производные в схемах FC, UFC-I и UFC вычислялись с использованием полинома 3-го порядка, причём на TS-сетках они совпадали с центральными разностями 4-го порядка.

В двумерном случае использовались сетки из правильных треугольников и неструктурированные квазиравномерные сетки, построенные генератором Gmsh. В трёхмерном случае использовались неструктурированные сетки, построенные генератором Gambit, а также TS-сетки, узлы в которых имели

Таблица 1. Точность схемы на линейной тестовой задаче на TS-сетке из правильных треугольников

Схема		EBR3	EBR5	FC	UFC-I	UFC
C-норма	h=2	8.20e-4	3.12e-5	2.51e-3	4.93e-4	4.94e-4
	h=1	1.08e-4	1.01e-6	6.46e-4	6.26e-5	6.15e-5
	h=1/2	1.37e-5	-	1.62e-4	7.67e-6	7.67e-6
	порядок (числ.)	2.98	4.95	1.99	3.03	3.00
L1-норма	h=2	1.31e-4	4.67e-6	3.80e-4	7.70e-5	7.74e-5
	h=1	1.68e-5	1.53e-7	9.46e-5	9.68e-6	9.49e-6
	h=1/2	2.11e-6	-	2.36e-5	1.18e-6	1.18e-6
	порядок (числ.)	2.99	4.93	2.01	3.04	3.01
	порядок (теор.)	3	5	2	3	3

координаты

$$C_{ijk} = \bar{h} \begin{pmatrix} i + 0.33j + 0.16k \\ -0.27i + j + 0.4k \\ 0.15i - 0.22j + k \end{pmatrix},$$

где $\bar{h} = 1$ для грубой сетки и $\bar{h} = 1/2$ для мелкой. В таблице приводится ошибка по пульсации давления в максимальной и интегральной нормах.

Из представленных результатов видно, что на трансляционно-симметрических сетках оригинальная схема Flux Corrector имеет 2-й порядок точности, тогда как предлагаемые в настоящей работе её модификации UFC и UFC-I позволяют добиться 3-го порядка. На неструктурированной сетке поведение схем UFC и UFC-I практически повторяет поведение схемы EBR3: на грубых сетках превалирует ошибка 3-го порядка малости по характерному шагу сетки, а на подробных сетках начинает преобладать ошибка 2-го порядка. Это можно наблюдать по наклону графика ошибки в зависимости от шага сетки на рис. 1: на грубых сетках численный порядок сходимости близок к трём, тогда как на подробных – к двум.

Формально, для применения метода UFC-I требуется решение системы линейных уравнений с матрицей M . Несмотря на то, что матрица M симметрическая и имеет диагональное преобладание, эта операция является ресурсоёмкой. При этом точность расчётов по схеме UFC-I не даёт существенного выигрыша по сравнению со схемой UFC. Даже в тех случаях, когда этот выигрыш имеется,

Таблица 2. Точность схемы на линейной тестовой задаче на неструктурированной треугольной сетке

Схема		EBR3	EBR5	FC	UFC-I	UFC
С-норма	h=2	1.12e-3	5.53e-4	2.51e-3	8.64e-4	9.10e-4
	h=1	1.71e-4	1.07e-4	6.35e-4	1.14e-4	1.21e-4
	h=1/2	3.52e-5	3.25e-5	1.59e-4	2.08e-5	2.42e-5
	h=1/4	8.06e-6	8.34e-6	3.93e-5	3.35e-6	4.15e-6
	h=1/8	1.73e-6	2.06e-6	9.82e-6	8.36e-7	1.08e-6
	порядок (числ.)	2.22	2.02	2.00	2.00	1.94
L1-норма	h=2	1.20e-4	2.14e-5	3.69e-4	8.56e-5	8.60e-5
	h=1	1.58e-5	4.55e-6	9.16e-5	1.12e-5	1.11e-5
	h=1/2	2.04e-6	1.13e-6	2.27e-5	1.40e-6	1.41e-6
	h=1/4	3.08e-7	2.72e-7	5.65e-6	1.99e-7	2.15e-7
	h=1/8	6.21e-7	6.94e-8	1.41e-6	4.02e-8	4.55e-8
	порядок (числ.)	2.31	1.97	2.00	2.30	2.24
	порядок (теор.)	2	2	2	2	2

Таблица 3. Точность схемы на линейной тестовой задаче на тетраэдральной TS-сетке

Схема		EBR3	EBR5	FC	UFC-I	UFC
С-норма	h=1	6.71e-3	7.41e-4	1.15e-2	4.08e-3	4.10e-3
	h=1/2	9.71e-4	2.63e-5	2.75e-3	5.11e-4	5.14e-4
	порядок (числ.)	2.79	4.84	2.06	3.00	3.00
L1-норма	h=1	1.66e-3	1.59e-4	3.12e-3	9.77e-4	9.78e-4
	h=1/2	2.31e-4	7.71e-6	8.03e-4	1.21e-4	1.21e-4
	порядок (числ.)	2.85	4.88	1.96	3.01	3.01
	порядок (теор.)	3	5	2	3	3

близкой точности можно добиться, если взять не один, а два члена матричного ряда для $(I + M)^{-1}$:

$$V \frac{du}{dt} = (1 - M + M^2) Au.$$

Данные расчётов по такой схеме почти совпадают со схемой UFC-I и поэтому не приводятся.

Сравнение схем UFC и UFC-I со схемой EBR3 показывает, что на предло-

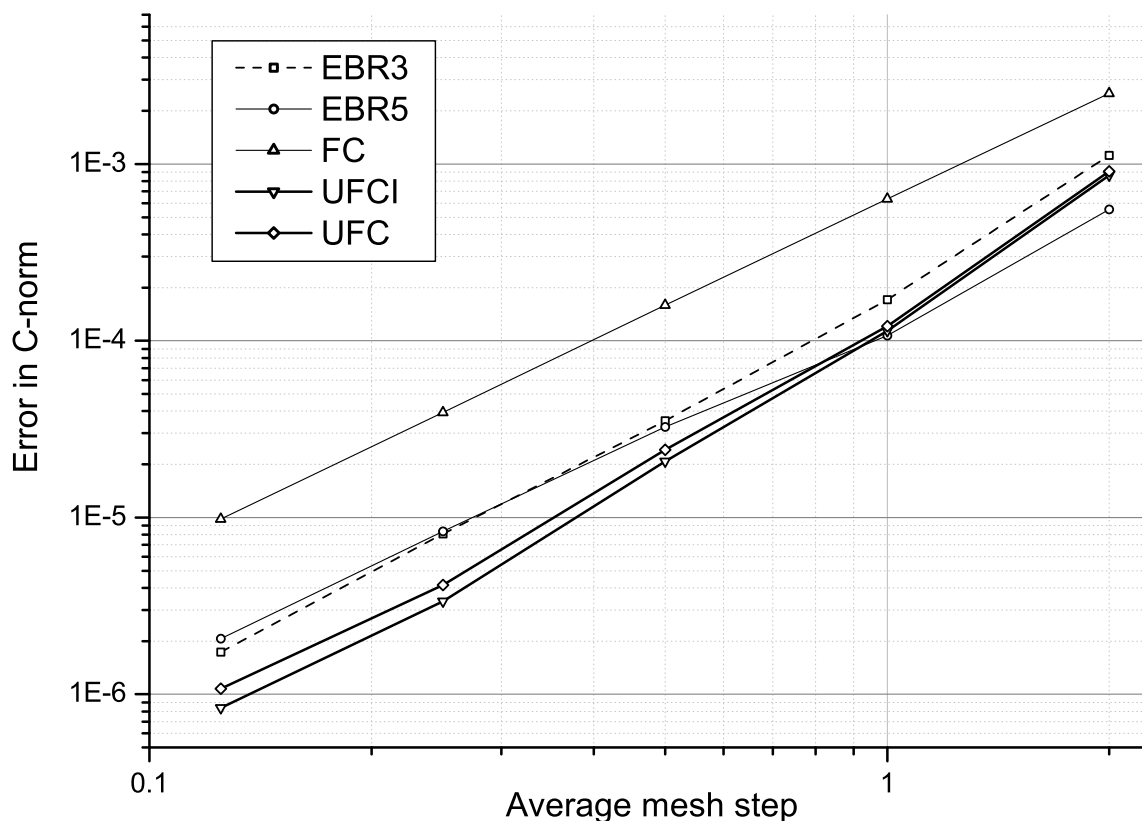


Рис. 1. Сеточная сходимость на последовательности двумерных неструктурированных сеток

женных тестах схемы UFC и UFC-I обладают примерно вдвое меньшей ошибкой. Это связано с тем, что при их реализации использовались градиенты, посчитанные по полиномам 3-го порядка. При использовании полиномов 2-го порядка схемы UFC, UFC-I и EBR3 будут по точности очень близки. Эффект уменьшения ошибки вдвое при использовании полиномов 3-го порядка вместо 2-го легко объяснить на примере одномерного случая, выписав аппроксимационную ошибку.

На стационарных задачах схема FC даст третий порядок точности, что даёт ей преимущество по сравнению со схемами EBR3 и EBR5, а решение по схемам UFC и UFC-I будет в точности совпадать с решением по схеме FC. Если же для задачи можно построить TS-сетку или близкую к ней, то наилучшего результата можно добиться применением схемы EBR5, обладающей на TS-сетке пятым порядком аппроксимации.

Таблица 4. Точность схемы на линейной тестовой задаче на неструктурированной тетраэдральной сетке

Схема		EBR3	EBR5	FC	UFC-I	UFC
С-норма	h=1	4.79e-3	1.82e-3	1.39e-2	2.69e-3	2.82e-3
	h=1/2	6.54e-4	4.36e-4	3.21e-3	3.46e-4	3.51e-4
	h=1/4	1.04e-4	1.09e-4	7.68e-4	5.79e-5	5.99e-5
	порядок (числ.)	2.65	2.41	2.00	2.58	2.55
L1-норма	h=1	7.23e-4	2.50e-4	2.35e-3	4.38e-4	4.45e-4
	h=1/2	9.70e-5	5.15e-5	6.02e-4	5.60e-5	5.70e-5
	h=1/4	1.37e-5	1.24e-5	1.51e-4	7.95e-6	8.22e-6
	порядок (числ.)	2.94	2.03	2.01	2.82	2.79
	порядок (теор.)	2	2	2	2	2

Заключение

В работе предложена модификация схемы Flux Corrector, представленной А. Katz и V. Sankaran в работе [15], позволяющая достичь 3-го порядка точности на трансляционно-симметрических сетках на нестационарных задачах. Эта модификация заключается во введении матрицы Q (28), на которую следует домножить уже вычисленные по схеме FC производные.

Несмотря на то, что на произвольных неструктурированных сетках в нестационарном случае порядок точности остаётся равным 2, предлагаемый метод позволяет снизить ошибку в несколько раз. Вычислительная стоимость предложенного метода лишь примерно на 5% превосходит оригинальный метод, что делает новый метод значительно более эффективным в решении нестационарных задач на неструктурированных сетках.

Список литературы

1. Barth T. J., Frederickson P. O. High order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction // AIAA Paper No. 90-0013. 1990.
2. Hu C., Shu C.-W. Weighted essentially non-oscillatory schemes on Triangular meshes // Journal of Computational Physics. 1999. Vol. 150. P. 97–127.
3. Quadrature-free non-oscillatory finite volume schemes on unstructured meshes for nonlinear hyperbolic systems / Dumbser M., Kaeser M., Titarev V. A. et al. // Journal of Computational Physics. 2007. Vol. 226. P. 204–243.

4. Tsoutsanis P., Titarev V. A., Drikakis D. WENO schemes on arbitrary mixed-element unstructured meshes in three space dimensions // *Journal of Computational Physics*. 2011. Vol. 230. P. 1585–1601.
5. Wang Z.J, Zhang Laiping, Liu Yen. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructured grids IV: extension to two-dimensional systems // *Journal of Computational Physics*. 2004. T. 194, № 2. C. 716 – 741. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999103005035>.
6. Cockburn B., Shu C.-W. Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems // *Journal of scientific computing*. 2001. Vol. 16, no. 3. P. 173–261.
7. Atkins H. L., Shu C.-W. Quadrature-free implementation of discontinuous Galerkin method for hyperbolic equations // *AIAA Journal*. 1988. May. Vol. 36. P. 775–782.
8. Spectral Difference Method for Unstructured Grids II: Extension to the Euler Equations / Wang Z. J., Liu Y., May G. et al. // *Journal of Scientific Computing*. 2007. Vol. 32. P. 45–71.
9. Sun Y., Wang Z. J., Liu Y. High-order multidomain spectral difference method for the Navier-Stokes equations on unstructured hexahedral grids // *Communication in Computational Physics*. 2007. Vol. 2. P. 310–333.
10. Premasuthan S., Liang C., Jameson A. Computation of Flows with Shocks Using Spectral Difference Scheme with Artificial Viscosity // *AIAA paper No 2010-1449*. 2007.
11. Premasuthan S., Liang C., Jameson A. Computation of Flows With Shocks using the Spectral Difference method with Artificial Viscosity, II: Modified Formulation and Local Mesh Refinement // *Computers and Fluids*. 2014. Vol. 98. P. 122–133.
12. Abalakin I. V., Bachwalow P. A., Kozubskaya T. K. Edge-Based Methods in CAA // *Accurate and Efficient Aeroacoustic Prediction Approaches for Airframe Noise, Lecture Series 2013-03* / Ed. by E. C.Schram, R.Denos. von Karman Institute for Fluid Dynamics (ISBN-13 978-2-87516-048-5), 2013.
13. Abalakin A., Bachwalow P., Kozubskaya T. Edge-based reconstruction schemes for prediction of near field flow region in complex aeroacoustic problems // *International Journal of Aeroacoustics*. 2014. Vol. 13, no. 3-4. P. 207–234.

14. Barth T. J. Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721. 1991.
15. Katz Aaron, Sankaran Venkateswaran. An Efficient Correction Method to Obtain a Formally Third-Order Accurate Flow Solver for Node-Centered Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2012. may. T. 51, № 2. С. 375–393. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-011-9515-1>.
16. Nishikawa Hiroaki. First, Second, and Third Order Finite-volume Schemes for Advection-diffusion // J. Comput. Phys. San Diego, CA, USA, 2014. sep. T. 273. С. 287–309. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.05.021>.
17. Pincock B. B., Katz A. High-order flux correction for viscous flows on arbitrary unstructured grids // AIAA paper No 2011-1566. 2013.
18. Work C. D., Katz A. J. Aspects of the Flux Correction Method for Solving the Navier-Stokes Equations on Unstructured Meshes // AIAA paper No 2015-0834. 2015.
19. Barth T. J. A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-1548. 1991.
20. Pincock B., Katz A. High-Order Flux Correction for Viscous Flows on Arbitrary Unstructured Grids // J. Sci. Comput. New York, NY, USA, 2014. nov. T. 61, № 2. С. 454–476. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s10915-014-9833-1>.
21. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Однородные разностные схемы на неравномерных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1962. Т. 2. С. 812–832.
22. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Структура ошибки консервативного 4-точечного конечно-разностного оператора дифференцирования на неравномерных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 74. С. 1–32. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-74>.

Оглавление

Введение	3
Схема Flux Corrector в одномерном случае	4
Схема Flux Corrector в многомерном случае	5
Схема Flux Corrector на TS-сетках	6
Модификация схемы FC на TS-сетке для нестационарных задач	10
Модификация схемы Flux Corrector на неструктурированной сетке	11
Анализ в одномерном случае	14
Тестирование	15
Заключение	19
Список литературы	19